ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — MAI 1975

CONCOURS DE RECRUTEMENT DES ELEVES-PILOTES DE LIGNE

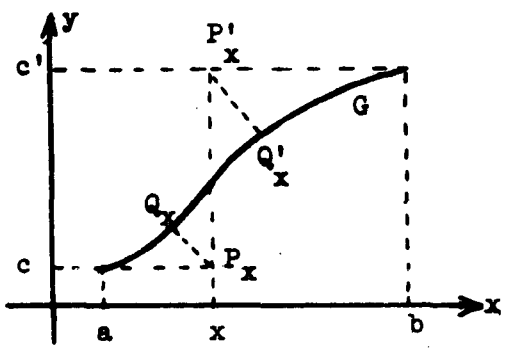
EPREUVES DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 H 00
Coef. : 6

Ce sujet comporte 5 exercices indépendants.

Les candidats doivent choisir quatre exercices, et quatre seulement, parmi les cinq proposés. Ils doivent indiquer leur choix en tête de leur copie. Ne sera corrigée que la rédaction correspondant à ce choix.

EXERCICE I



Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $O, \vec{i}, \vec{j}$, d'axes Ox, Oy. Les nombres réels a et b sont tels que $a < b$.

On considère une fonction g définie continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a,b]$, dont la fonction réciproque est g^{-1}. On pose $g(a) = c$ et $g(b) = c'$. Le graphe de g est noté G.

a) Que peut on dire du sens de variation et de la continuité de g^{-1} .
A tout réel $x \in [a,b]$ on associe les points P_x et P'_x de coordonnées respectives (x,c) et (x, c'). Les droites de coefficients directeurs $(-1, +1)$ passant respectivement par P_x et P'_x coupent G aux points Q_x et Q'_x. On désigne par $\sqrt{2}\, t(x)$ et $\sqrt{2}\, t'(x)$ les distances respectives de P_x à Q_x et de P'_x à Q'_x.

b) Faisant intervenir g^{-1}, calculer x d'une part en fonction de $U = t(x)$ et, d'autre part, en fonction de $U' = t(x)$.

c) Etudier les sens de variation et la continuité des fonctions t^{-1} et $(t')^{-1}$ des fonctions t et t' ainsi définies.

d) En conclure que t et t' sont strictement monotones sur $[a,b]$ et préciser leur sens respectif de variation.

e) Montrer que sur $[a,b]$ la fonction $h = t - t'$ prend la valeur zéro une fois et une fois seulement.

.../...

EXERCICE 2

Soit l'équation différentielle E : $y' \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = 0$

a) Montrer que les graphes des fonctions solution de E, dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $O, \vec{i}, \vec{j}$ d'axes Ox, Oy, sont formés d'arcs des courbes C_k définies paramètriquement par :

$x = \sin t \quad ; \quad y = \sin (t + k) \quad ; \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$;

k étant un nombre réel.

b) Montrer que les courbes intégrales sont des arcs de coniques dont on mettra l'équation sous la forme F (x, y, m) = 0, F étant un polynôme symètrique en x, y, m et m une constante qu'on exprimera en fonction de k ; construire la conique correspondant à $k = \frac{\pi}{3}$ et, sans calcul, indiquer les arcs de cette conique qui ne sont certainement pas partie d'une courbe intégrale de E.

EXERCICE 3

a) Donner sans démonstration les expressions de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ en fonction de $e^{i\varphi}$; en déduire que si m est un entier non nul

$$I(m) = \int_0^{\pi} e^{im\varphi} d\varphi = \frac{e^{im\pi} - 1}{im}$$

Expliciter les valeurs de I (m) selon la parité de l'entier m.

b) k et p étant des entiers quelconques on pose :

$$C(k,p) = \int_0^{\pi} \sin^k \varphi \cos p\varphi \, d\varphi ;$$

$$S(k,p) = \int_0^{\pi} \sin^k \varphi \sin p\varphi \, d\varphi ;$$

$$E(k,p) = C(k,p) + iS(k,p).$$

Exprimer E (k,p) sous forme d'une combinaison linéaire d'intégrales du type I (m).

.../...

c) Lorsque $k \geqslant p$, expliciter en fonction de k et p :

$C(2k, 2p)$; $S(2k, 2p)$; $C(2k, 2p+1)$;

$S(2k+1, 2p)$; $C(2k+1, 2p+1)$; $S(2k+1, 2p+1)$.

EXERCICE 4

Soit A et B deux points diamétralement opposés d'un cercle (C). Soit M un point de (C), on désigne par P la projection orthogonale de M sur AB et par Q le symétrique de A par rapport à P. Construire le lieu du point H, point de concours des hauteurs du triangle A M Q, lorsque M décrit (C). On pourra adopter pour axes de coordonnées le diamètre AB et la tangente au cercle en A.

EXERCICE 5

x est réel, n est entier positif et λ est une constante strictement positive.

a) Etudier la limite pour $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ de la valeur de la fonction

$$f_{n,\lambda} : x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow f_{n,\lambda}(x) = \sin 2nx \, \mathrm{Log}(\lambda \cos x).$$

b) si $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n,1}(x)\,dx$ montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n,\lambda}(x)\,dx = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2n} \mathrm{Log}\lambda + I_n .$$

c) Calculer I_1 et I_2 .

d) Etablir : $I_n = (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2nx \; \mathrm{Log}(\sin x)\,dx$

et $n\,I_n = (-1)^n J_n$ où $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 nx \cot gx \, dx$.

e) Calculer $J_n - J_{n-1}$ et en déduire I_n selon la parité de n.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail